3. DETERMINANTE I SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

1. Neka su a_{ij} $(i, j=\overline{1, n})$ dati brojevi. ***Determinantom n-tog reda*** nazivamo broj koji se predstavlja sljedećom shemom:

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

a za čiju su definiciju potrebna dodatna objašnjenja.

Brojevi a_{ij} nazivaju se elementi determinante, gdje je $i\,(=\overline{1, n})$ redni broj vrste, $j\,(=\overline{1, n})$ redni broj kolone u kojoj se taj elemenat nalazi. Determinanta n-tog reda (za svako $n \in N$) ima n vrsta i n kolona.

1.1. *Minor* ili *subdeterminanta* elementa a_{ij} determinante (1) je determinanta $(n-1)$-vog reda koja se iz determinante (1) dobije precrtavanjem i-te vrste i j-te kolone i označava se sa D_{ij}. Broj $A_{ij}=(-1)^{i+j}D_{ij}$ – označava *kofaktor* (*algebarski komplement*) elementa a_{ij}.

1.2. Determinanta prvog reda $(n=1)$ koju obrazuje broj a_{11} je upravo taj broj a_{11}. Determinantom n-tog reda $(n \geqslant 2)$ nazivamo broj:

$$(2)\qquad D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\dots a_{1n}A_{1n},$$

gdje smo sa D označili determinantu (1).

Primjedba:

a) Primjenom ove definicije dobije se

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{12}-a_{12}a_{21}, \quad \text{za} \quad n=2,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

za $n=3$ itd.

b) Može se dokazati da je definicija determinante n-tog refa ekvivalentna sa

$$D=\sum \pm a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\dots a_{nj_n},$$

gdje se sumiranje vrši po svim permutacijama $j_1, j_2, \dots, j_n$ skupa indeksa $1, 2, \dots, n$. Za definiciju determinante najveće zasluge pripadaju Laplasu* koji je oko 1772. formulisao slijedeću teoremu:

* Pierre Simon Laplace (1749 – 1827), francuski matematičar, fizičar i astronom.

2. Za determinantu n-tog reda vrijede slijedeće formule:

$$(3)\qquad a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\dots+a_{kn}A_{in}=\delta_{ki}D, \quad (k, i=\overline{1, n}),$$

$$(4)\qquad a_{1k}A_{1j}+a_{2k}A_{2j}+\dots+a_{nk}A_{nj}=\delta_{kj}D, \quad (k, j=\overline{1, n}),$$

gdje je
$$\delta_{ij}=\begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Kronekerov* simbol.

Formula (3) za $k=i$ naziva se *razvoj determinante D* po k-toj vrsti; specijalno za $k=i=1$, (3) se svodi na (2). Formula (4) za $k=j$ predstavlja razvoj determinante D po k-toj koloni.

3. Neke osobine determinante:

(i) Vrijednost determinante se ne mijenja pri njenoj transpoziciji, tj. ako vrste razmijene mjestâ sa odgovarajućim kolonama i obrnuto.

(ii) Ako dvije vrste (kolone) razmijene položaj, determinanta mijenja znak.

(iii) Ako su dvije vrste (kolone) determinante jednake, onda je $D=0$.

(iv) Determinanta se množi brojem ako se jedna i samo jedna vrsta (kolona) pomnoži tim brojem. (Kolona, tj. vrsta se množi brojem tako da joj se svi elementi pomnože tim brojem.)

(v) Ako su elementi jedne vrste (kolone) proporcionalni elementima neke druge vrste (kolone), tada je $D=0$.

(vi) Determinanta ne mijenja vrijednost ako se jednoj vrsti (koloni) doda druga vrsta (kolona) prethodno pomnožena nekim brojem. (Vrsti dodajemo vrstu tako da na njene elemente dodamo odgovarajuće elemente druge vrste.)

(vii) Osobine superpozicije: zbir dvije determinante reda n koje imaju $(n-1)$ jednakih vrsta (kolona) i (možda) različitu i-tu vrstu (kolonu) jednak je determinanti čija je i-ta vrsta jednaka zbiru i-tih vrstâ determinanti sabiraka, a preostale vrste ostaju nepromijenjene (kao kod sabiraka).

4. *Sistem od n linearnih algebarskih* jednačina sa n nepoznatih $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, gdje su $a_{ij}(i, j=\overline{1, n})$ i $b_i\,(i=\overline{1, n})$ dâti brojevi, zapisujemo u obliku

$$(5)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad\cdot \\ \qquad\qquad\cdot \\ \qquad\qquad\cdot \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

Rješenjem sistema (5) nazivamo bilo koju uređenu n-torku brojeva $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, tako da je

$$a_{i1}\xi_1+a_{i2}\xi_2+\dots+a_{in}\xi_n=b_i, \text{ za } i=\overline{1, n}.$$

Sistem (5) je *saglasan* (kompatibilan) ako postoji bar jedno rješenje tog sistema; u suprotnom se kaže da je sistem *nesaglasan* (protivrječan).

* Leopold Kronecker (1823 – 1891), njemački matematičar.

Determinantom sistema (5) nazivamo determinantu D koja za i-tu vrstu ima koeficijente i-te jednačine sistema (5), a za j-tu kolonu koeficijente uz j-tu nepoznatu x_j.

Determinantom nepoznate x_j nazivamo determinantu $D_j\,(j=\overline{1,n})$, koja se dobije iz determinante D sistema (5) kada se njena j-ta kolona (tj. kolona uz nepoznatu x_j) zamijeni kolonom na desnoj strani sistema jednačina, tj. kolonom formiranom od slobodnih članova $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sistema (5).

5. *Kramerovo* pravilo*: Ako za determinantu D sistema (5) vrijedi $D\neq 0$, tada je

$$x_j=\frac{D_j}{D}\quad (j=\overline{1,n})$$

jedinstveno rješenje sistema (5).

Ako je $D=0$ i $D_j\neq 0$ za bar jedno $j\,(=\overline{1,n})$, tada je sistem (5) nesaglasan.

U slučaju $D=0$ i $D_j=0$ za svako $j=\overline{1,n}$ moguće je da sistem (5) ima ili beskonačno mnogo rješenja ili da nema rješenja. Za precizniji odgovor potrebno je dodatno istraživanje.

6. Sistem linearnih jednačina (5) naziva se *homogenim* ako su svi slobodni članovi jednaki nuli. Ako je determinanta sistema $D\neq 0$, tada iz (Kramerova pravila) 5. slijedi da je trivijalno rješenje $(x_1, \ldots, x_n)=(0, \ldots, 0)$ jedinstveno rješenje sistema ($\Leftarrow(\forall j=\overline{1,n});\ D_j=0$). Da bi homogeni sistem jednačina imao netrivijalna rješenja, potrebno je i dovoljno da je $D=0$.

ZADACI

1. Izračunati determinante:

a) drugog reda

$$\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix}\sin x & -\cos x\\ \cos x & \sin x\end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix}x^3 & x^2+x+1\\ x-1 & 1\end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix}m^2 & mn\\ mn & n^2\end{vmatrix};$$

b) trećeg reda

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 6\end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix}1 & a & bc\\ 1 & b & ca\\ 1 & c & ab\end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}.$$

2. Dokazati:

$$\begin{vmatrix}a & b & c & d\\ a & -b & -c & -d\\ a & b & -c & -d\\ a & b & c & -d\end{vmatrix}=-8abcd;\quad \begin{vmatrix}a & a & a & a\\ a & b & b & b\\ a & b & c & c\\ a & b & c & d\end{vmatrix}=a(b-a)(c-b)(d-c).$$

* Gabriel Cramer (1704—1752), švajcarski matematičar.

3. Riješiti nejednačinu:

$$\begin{vmatrix}x & 3 & x\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & x & 1\end{vmatrix}>\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & x\\ 1 & x & 0\end{vmatrix}.$$

4. Dokazati da je $a+b+c+x+y+z$ faktor determinante

$$\begin{vmatrix}a+x & b+y & c+z\\ b+x & c+y & a+z\\ c+x & a+y & b+z\end{vmatrix}$$

te izračunati determinantu.

5. Ne razvijajući determinantu, dokazati:

a) $$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1\\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2\\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix};$$

b) $$\begin{vmatrix}a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1\\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2\\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3\end{vmatrix}=(1-x^2)\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}.$$

6. Izračunati:

a) $$\begin{vmatrix}13647 & 13657 & 17844\\ 28423 & 28433 & -19371\\ 28423 & 28433 & -19372\end{vmatrix};$$

b) $$\begin{vmatrix}z & -z & 0\\ z & z^2 & -1\\ 1 & z & z+1\end{vmatrix},$$

ako kompleksni broj z zadovoljava uslov $z^5=1$;

c) $$\begin{vmatrix}a^2 & b\sin\alpha & c\sin\alpha\\ b\sin\alpha & 1 & \cos\alpha\\ c\sin\alpha & \cos\alpha & 1\end{vmatrix},$$

ako su a, b, c dužine strane trougla i α ugao nasuprot stranice a;

d) $$\begin{vmatrix}1 & z & z^2\\ z^2 & 1 & z\\ z & z^2 & 1\end{vmatrix},\ \text{gdje je } z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

e) $$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & z & z^2\\ 1 & z^2 & z\end{vmatrix},\ \text{gdje je } z=\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}.$$

7. Izračunati Vandermondovu* determinantu:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

8. Koristeći definiciju determinante, izračunati:

a) trougaonu determinantu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

b) dijagonalnu determinantu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

9. Dokazati da je $D \in R$, gdje je

$$D = \begin{vmatrix} i & a & \bar{a} \\ i & b & \bar{b} \\ i & c & \bar{c} \end{vmatrix}, \sqrt{-1} = i; \ (a, b, c \in C).$$

10. Neka su dati funkcija $x \mapsto f(x)$ i dvije tačke $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ njenog grafika. Pokazati da je

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & a & f(a) \\ 1 & b & f(b) \end{vmatrix} = 0, \text{ jednačina tetive kroz tačke } A \text{ i } B.$$

11. Izračunati determinantu

a) $$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

b) Uopštiti rezultat na determinantu reda n čiji su elementi $a_{ii} = x$, $a_{ij} = a \ (i \neq j)$.

12. Dokazati da je determinanta $(n+1)$-vog reda

$$D_{n+1} = \prod_{k=1}^{n} b_k \text{ ako je } a_{i1} = 1, \ i = \overline{1, n+1};$$

$$a_{ij} = x_{j-1}; \ i = \overline{1, n}; \ j = \overline{2, n+1}; \ i \neq j; \qquad a_{ii} = x_{i-1} + b_{i-1}, \ i = \overline{2, n+1}.$$

* Vandermonde A. T. (1736–1796), francuski matematičar.

13. Data je tridijagonalna determinanta $D_n = |a_{ij}|$, tako da je:
$a_{11} = \cos\theta$, $a_{ii} = 2\cos\theta$; $a_{i-1,i} = a_{i,i-1} = 1 \ (i = \overline{2, n})$.
Tada je $D_n = \cos n\theta \ (n \in N)$. Dokazati!

14. Neka je $a_{ii} = 0 \ (i = \overline{2, n})$, a ostali elementi determinante n-tog reda jednaki su 1. Dokazati

$$D_n = (n-1)(-1)^{n-1}.$$

15. Riješiti sistem jednačina:

a) $2x_1 - x_2 - x_3 = 4$
$3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11$
$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11$;

b) $x + 2y - z = 1$
$2x - y - z = 0$
$-x + 2y = 1$;

c) $x + 2y - z = 2$
$2x - y - z = 0$
$-x + 2y = 0$;

d) $x + y + z + t = 0$
$3x - 5y + z - 3t = 1$
$x + 6y + 3z - 7t = 2$
$2x - y - 4z + 5t = 6$.

16. Odrediti $a \in R$ za koje je sistem linearnih jednačina saglasan i riješiti ga:

a) $(a-1)x + z = 0$
$(a+1)x - ay - z = -1$
$y + az = 1$;

b) $x + y + az + t = 1$
$x + 2y + t = 0$
$x + t = a$
$ax + z = 1$;

c) $x + y + z = a$
$x + (1+a)y + z = 2a$
$x + y + (1+a)z = 0$;

d) $ax + y + z + u = 1$
$x + ay + z + u = a$
$x + y + az + u = a^2$
$x + y + z + au = a^3$;

e) $x + y + z = 6$
$ax + 4y + z = 5$
$6x + (a+2)y + 2z = 13$.

17. Odrediti $a, b \in R$ za koje je dati sistem jednačina saglasan i riješiti ga:

a) $ax + 2z = 2$
$5x + 2y = 1$
$x - 2y + bz = 3$;

b) $ax + by + z = 1$
$x + aby + z = b$
$x + by + az = 1$;

c) $ax + y + z = 4$
$x + by + z = 3$
$x + 2by + z = 4$.

18. Riješiti sistem homogenih jednačina $(\lambda \in R)$:

a) $2x + \lambda y - 3z = 0$
$3x - y + 5z = 0$
$x - 2y + (\lambda+7)z = 0$;

b) $2x + y - 4z = 0$
$3x + 5y - 7z = 0$
$4x - 5y - 6z = 0$;

c) $x + 2y = 0$
$(\lambda+3)y + z = 0$
$x + \lambda z = 0$;

d) $3x - y + z = 0$
$\lambda x - y + 2z = 0$
$x + \lambda y + (\lambda+1)z = 0$;

e) $2x + 3y - z - t = 0$
$x - y - 2z - 4t = 0$
$3x + y + 3z - 2t = 0$
$6x + 3y - 7t = 0$.

19. Provjeriti da sistem

$$2x_1-3x_2+4x_3-3x_4=0$$
$$3x_1-x_2+11x_3-13x_4=0$$
$$4x_1+5x_2-7x_3-2x_4=0$$
$$13x_1-25x_2+x_3+11x_4=0$$

ima rješenje $x_1=x_2=x_3=x_4=1$. Da li se bez računanja može tvrditi da li je determinanta sistema jednaka nuli (ili je različita od nule)?

20. Dokazati da sistem

$$ax+by+cz+dt=0$$
$$bx-ay+dz-ct=0$$
$$cx-dy-az+bt=0$$
$$dx+cy-bz-at=0$$

ima jedinstveno rješenje ako su $a, b, c, d \in R$ i $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$.

21. Riješiti sistem jednačina:

a) $x+y+z=a,$
$x+ky+k^2z=b,$
$x+k^2y+kz=c, \ (k \neq 1, \ k^3=1);$

b) $-x+y+z+t=a,$
$x-y+z+t=b,$
$x+y-z+t=c,$
$x+y+z-t=d.$

22. Odrediti polinom $P: R \to R$ najnižeg stepena koji ispunjava slijedeće uslove:

a) $P(1)=-1, \ P(-1)=9, \ P(2)=-3;$

b) $P(-1)=0, \ P(1)=4, \ P(2)=3, \ P(3)=6;$

c) grafik funkcije $y=P(x)$ prolazi kroz tačke $(0, 1), (1, -1), (2, 5), (3, 37);$

d) grafik funkcije $x=P(y)$ prolazi kroz tačke $(5, 0), (-13, 2), (-10, 3), (-2, 1), (14, -1).$

23. Riješiti jednačine:

a) $$\begin{vmatrix} x-3 & x+2 & x-1 \\ x+2 & x-4 & x \\ x-1 & x+4 & x-5 \end{vmatrix}=0;$$

b) $$\begin{vmatrix} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) & \sin x & \cos x \\ \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) & \cos x & \sin x \\ 1 & a & 1-a \end{vmatrix}=\frac{\sqrt{2}-2}{4};$$

c) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & n-x & \end{vmatrix}=0;$$

d) $$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}=0;$$

e) $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n+1} \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & \dots & a_{n+1} \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & \dots & a_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n+a_{n+1}-x \end{vmatrix}=0, \ (a_i \neq a_j \Leftrightarrow i \neq j).$$

RJEŠENJA

1. a) 5; 1; 1; 0. b) 0; 1; $(b-a)(c-a)(c-b)$; $(b-a)(c-a)(c-b)$.

2. Ako 1. vrstu oduzmemo od 2, 3. i 4. vrste, dobije se:

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & -2b & -2c & -2d \\ 0 & 0 & -2c & -2d \\ 0 & 0 & 0 & -2d \end{vmatrix}=a\cdot(-2b)(-2c)(-2d)=-8abcd.$$

Oduzećemo 3. vrstu od 4. vrste, 2. od 3. i 1. od druge vrste. Dobijemo

$$D=\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix}=a(b-a)(c-b)(d-c).$$

3. Kako je

$$\begin{vmatrix} x & 3 & x \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & x & 1 \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ x & 1 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 3 & x \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=x(1-3x)-2(3-x^2)+9-x=3-x^2;$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & x \end{vmatrix}=2x,$$

treba da je: $-x^2+3>2x \Leftrightarrow x^2+2x-3<0 \Leftrightarrow x \in (-3, 1).$

4. Ako na prvu kolonu determinante dodamo ostale kolone, determinanta ne mijenja vrijednost, prema teoremi 3 (*vi*). Stoga je:

$$D=\begin{vmatrix} a+b+c+x+y+z & b+y & c+z \\ a+b+c+x+y+z & c+y & a+z \\ a+b+c+x+y+z & a+y & b+z \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & b+y & c+z \\ 1 & c+y & a+z \\ 1 & a+y & b+z \end{vmatrix}$$ (oduzmimo 1. vrstu od 2. i 3. vrste)

$$=(a+b+c+x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & b+y & c+z \\ 0 & c-b & a-c \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix}$$ (razvijanje determinanta po elementima 1. kolone)

$$=(a+b+c+x+y+z)\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} c-b & a-c \\ a-b & b-c \end{vmatrix}=(a+b+c+x+y+z)[-(c-b)^2-(c-a)(b-a)]$$

$$=(a+b+c+x+y+z)(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2).$$

5. I u a) i u b) primijeniti pravilo 3 (*vii*).

6. a) 147 760;

b) dodati prvu kolonu na drugu i razviti determinantu po prvoj vrsti. Izlazi redom:

$$D=\begin{vmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z^2 & -1 \\ 1 & z+1 & z+1 \end{vmatrix}=z\begin{vmatrix} z^2 & -1 \\ z+1 & z+1 \end{vmatrix}=z(z+1)\begin{vmatrix} z^2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=z(z+1)(z^2+1)=z^4+z^3+z^2+z.$$

Sada je prema formuli za zbir geometrijske progresije (vidi zadatak 1.3.9.):

$$D=\frac{z^5-z}{z-1}, \text{ za } z \neq 1,$$
$$=4, \text{ za } z=1,$$

tj.

$D=-1$, za $z\neq 1 \wedge z^5=1$,

$\quad =4$, za $z=1$;

c) $D=(a^2-b^2-c^2+2bc\cos\alpha)\sin^2\alpha=0$, pošto je prema kosinusnoj teoremi $a^2=b^2+c^2-2bc\cos x$.

d) Ako na prvu kolonu dodamo preostale kolone, dobijemo

$$D(z)=(z^2+z+1)\begin{vmatrix}1 & z & z^2\\ 1 & 1 & z\\ 1 & z^2 & 1\end{vmatrix}=\frac{z^3-1}{z-1}\begin{vmatrix}1 & z & z^2\\ 1 & 1 & z\\ 1 & z^2 & 1\end{vmatrix}\ (z\neq 1).$$

Sada je za $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$, $z^3=\operatorname{cis}2\pi=1$, tako da je $D\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=0$.

e) Sada je $z^3=1$, tj. $z^2+z+1=0\ (z\neq 1)$, tako da je nakon dodavanja svih kolona na prvu kolonu

$$D(z)=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ z^2+z+1 & z & z^2\\ z^2+z+1 & z^2 & z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 0 & z & z^2\\ 0 & z^2 & z\end{vmatrix}=3(z^2-z^4)=$$

$$=3(-1-z-1\cdot z)=-3-6z=3i\cdot\sqrt{3}.$$

7. Ovo je Vandermondeova determinanta n-tog reda, koju ćemo označiti sa V_n. Pomnožimo k-tu kolonu determinante V_n sa $-x_n$ i dodajmo je $(k+1)$-voj koloni redom za $k=n-1, n-2, \ldots, 1$. Na taj način se dobije:

$$V_n=\begin{vmatrix}1 & x_1-x_n & x_1(x_1-x_n) & \ldots & x_1^{n-2}(x_1-x_n)\\ 1 & x_2-x_n & x_2(x_2-x_n) & \ldots & x_2^{n-2}(x_2-x_n)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1 & x_{n-1}-x_n & x_{n-1}(x_{n-1}-x_n) & \ldots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1}-x_n)\\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}(x_1-x_n)(x_2-x_n)\ldots(x_{n-1}-x_n)V_{n-1}$$

$$=(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})V_{n-1},$$

gdje je

$$V_{n-1}=\begin{vmatrix}1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & & x_2^{n-2}\\ \cdot & \cdot & & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \\ 1 & x_{n-1} & \ldots & x_{n-1}^{n-2}\end{vmatrix}$$

Vandermondeova determinanta $(n-1)$-vog reda.

$$V_2=\begin{vmatrix}1 & x_1\\ 1 & x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1,$$

dobija se

$V_n\ \ =(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})V_{n-1},$

$V_{n-1}=(x_{n-1}-x_1)(x_{n-1}-x_2)\ldots(x_{n-1}-x_n)V_{n-2},$

$\cdot$

$\cdot$

$\cdot$

$V_3\ \ =(x_3-x_1)(x_3-x_2)V_2,$

odakle se dobije

$V_n=(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-1})($

$)(x_{n-1}-x_1)(x_{n-1}-x_2)\ldots(x_{n-1}-x_{n-2})($

$\cdot$

$\cdot$

$\cdot$

$)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$

$)(x_2-x_1).$

Ovaj rezultat se može zapisati u obliku

$$V_n=\prod_{1\leq j<k\leq n}(x_k-x_j).$$

8. a) Trougaona determinanta jednaka je proizvodu dijagonalnih elemenata, tj.

$$a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}.$$

Zapisati gornju trougaonu determinantu kod koje su svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli i provjeriti da za nju vrijedi isti rezultat.

b) Dijagonalna determinanta je istovremeno i (donja i gornja) trougaona, te za nju vrijedi isti rezultat.

9. Konjugovana vrijednost determinante je

$$\overline{D}=\begin{vmatrix}-i & \overline{a} & a\\ -i & \overline{b} & b\\ -i & \overline{c} & c\end{vmatrix}\ (\overline{\overline{z}}=z\wedge\overline{i}=-i)$$

$$=(-1)^2\begin{vmatrix}i & a & \overline{a}\\ i & b & \overline{b}\\ i & c & \overline{c}\end{vmatrix}, \text{ tj. } \overline{D}=D\Leftrightarrow D\in R.$$

10. Ako ovu determinantu označimo sa $D(x, y)$, tada se data jednačina kraće zapisuje u obliku $D(x, y)=0$.

Ta jednačina je linearna po x i y, te predstavlja jednačinu pravca. Kako je, osim toga,

$$D(a,f(a))=\begin{vmatrix}1 & a & f(a)\\ 1 & a & f(a)\\ 1 & b & f(b)\end{vmatrix}=0;\quad D(b,f(b))=\begin{vmatrix}1 & b & f(b)\\ 1 & a & f(a)\\ 1 & b & f(b)\end{vmatrix}=0,$$

jer u determinantama $D(a,f(a))$ i $D(b,f(b))$ postoje dvije jednake vrste. Prema tome, prava $D(x,y)=0$ prolazi kroz tačke $A(a,f(a))$, $B(b,f(b))$, što je i trebalo dokazati.

11. a) Saberimo redom sve kolone od druge do pete i dodajmo prvoj, a potom oduzmimo prvu vrstu redom od svake vrste počevši od druge do pete (zadnje) vrste. Dobije se (dijagonalna determinanta)

$$D=\begin{vmatrix}9 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 9 & 5 & 1 & 1 & 1\\ 9 & 1 & 5 & 1 & 1\\ 9 & 1 & 1 & 5 & 1\\ 9 & 1 & 1 & 1 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}9 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\end{vmatrix}$$

$=9\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4=9\cdot 4^4$(vidi zadatak 8).

b) Istim transformacijama (koje ne mijenjaju vrijednost determinante) kao i u slučaju a) dobije se dijagonalna determinanta, tako da je

$D=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$.

12. Oduzeti prvu vrstu redom od svake vrste počevši od druge do posljednje $(n+1)$-ve vrste. Dobije se dijagonalna determinanta, odakle se, pak, dobije traženi rezultat.

13. Ako determinantu D_{n+1} razvijemo po elementima posljednje vrste, dobijemo

(1) $\qquad D_{n+1}=2\cos\theta\, D_n-D_{n-1}$.

Pretpostavimo sada da su tačne formule

(2) $D_{n-1}=\cos(n-1)\theta$, $D_n=\cos n\theta$ (induktivna pretpostavka).

Tada je, prema (1) i (2),

$D_{n+1}=2\cos\theta\cos n\theta-\cos(n\theta-\theta)=\cos\theta\cos n\theta-\sin\theta\sin n\theta=\cos(n+1)\theta$.

Na osnovu definicije determinante D_n imamo

$$D_1=\cos\theta,\ D_2=\begin{vmatrix}\cos\theta & 1\\ 1 & 2\cos\theta\end{vmatrix}=\cos 2\theta,$$

tj. formula $D_n=\cos n\theta$ je tačna za $n=1$ i $n=2$.
Time je induktivni dokaz završen.

14. Uporediti sa zadatkom 11.b).

15. a) Determinanta sistema je $D=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 3 & -2 & 4\end{vmatrix}=60\neq 0,$

te je prema Kramerovom pravilu (vidi teoremu 5)

$$(x_1, x_2, x_3)=\frac{1}{D}(D_1, D_2, D_3)$$
$$=(3, 1, 1),$$

jer je

$$D_1=\begin{vmatrix}4 & -1 & -1\\ 11 & 4 & -2\\ 11 & -2 & 4\end{vmatrix}=180,\ D_2=\begin{vmatrix}2 & 4 & -1\\ 3 & 11 & -2\\ 3 & 11 & 4\end{vmatrix}=60,\ D_3=\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 3 & 4 & 11\\ 3 & -2 & 11\end{vmatrix}=60.$$

b) $(x, y, z)=(-1, 0, -2)$; c) $(x, y, z)=(4, 2, 6)$;

d) Determinanta sistema $D=6\cdot 7\cdot 11\neq 0$, determinante nepoznatih

$D_x=3\cdot 191$, $D_y=6\cdot 5\cdot 7$, $D_z=-3\cdot 213$, $D_t=-6\cdot 24$,

tako da je

$$(x, y, z, t)=\left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}, \frac{D_z}{D}, \frac{D_t}{D}\right)=\left(\frac{191}{154}, \frac{5}{11}, \frac{-213}{154}, \frac{-24}{77}\right).$$

16. a) Determinanta sistema je

$$D=\begin{vmatrix}a-1 & 0 & 1\\ a+1 & -a & -1\\ 0 & 1 & a\end{vmatrix}=a(1+a)(2-a),$$

a determinante nepoznatih

$$D_x=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & -a & -1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}-1 & -a\\ 1 & 1\end{vmatrix}=a-1,$$

$$D_y=\begin{vmatrix}a-1 & 0 & 1\\ a+1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & a\end{vmatrix}=(a-1)(1-a)+1(a+1)=a(3-a),$$

$$D_z=\begin{vmatrix}a-1 & 0 & 0\\ a+1 & -a & -1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=(a-1)\begin{vmatrix}-a & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-(a-1)^2.$$

Mogući su slučajevi

(*i*) $D\neq 0\Leftrightarrow(a\neq 0\wedge a\neq -1\wedge a\neq 2)$.

Tada sistem ima jedinstveno rješenje

$$(x, y, z)=\left(\frac{a-1}{a(1+a)(2-a)}, \frac{3-a}{(1+a)(2+a)}, \frac{(a-1)^2}{a(1+a)(a-2)}\right);$$

(*ii*) $a=0\Rightarrow(D=0\wedge D_x=-1\neq 0)\Rightarrow$ sistem je nesaglasan (u tom slučaju prva jednačina $-x+z=0$ je protivrječna drugoj jednačini $x-z=-1$);

(*iii*) $a=-1\Rightarrow(D=0,\ D_x=-2\neq 0)\Rightarrow$ sistem je nesaglasan, (u ovom slučaju su protivrječne druga $y-z=-1$ i treća $y-z=1$ jednačina).

(*iv*) $a=2\Rightarrow(D=0,\ D_x=1\neq 0)\Rightarrow$ sistem je nesaglasan.

b) Determinante sistema i nepoznatih su:

$D=2a^2$, $D_x=3a-2$, $D_y=-a^3$, $D_z=2a-a^2$, $D_t=2a^3-3a+2$.

Za $a\neq 0$ ($\Leftrightarrow D\neq 0$) sistem ima jedinstveno rješenje

$$(x, y, z, t)=\left(\frac{3a-2}{2a^2}, \frac{-a}{2}, \frac{2-a}{2a}, \frac{2a^3-3a+2}{2a^2}\right);$$

dok za $a=0\Rightarrow(D=0,\ D_x=-2\neq 0)$, te je sistem nesaglasan.

c) Sada je $D=a^2$, $D_1=a^3$, $D_2=a^2$, $D_3=-a^2$.

Za $a\neq 0$ ($\Leftrightarrow D\neq 0$) je jedinstveno rješenje sistema

$$(x, y, z)=\left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \frac{D_3}{D}\right)=(a, 1, -1).$$

Za $a=0$ je $D=D_1=D_2=D_3=0$, te je potrebno dodatno razmatranje. U tom slučaju sistem se svodi na

$$\left.\begin{array}{l}x+y+z=0\\ x+y+z=0\\ x+y+z=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow x+y+z=0$$

jednu jednačinu. U ovom slučaju dvije nepoznate možemo birati proizvoljno, npr. $x=\alpha$, $y=\beta$ i $z=-\alpha-\beta$, tj. sistem je saglasan i ima beskonačno mnogo rješenja ili $(\forall\alpha, \beta\in R)$

$(x, y, z)=(\alpha, \beta, -\alpha-\beta)$.

d) Za ovaj sistem je

$D=(a+3)(a-1)^3$, $D_x=-(a^2+2a+3)(a-1)^3$,

$D_y=-(a^2+a-1)(a-1)^3$, $D_z=(2a+1)(a-1)^3$, $D_t=(a^3+3a^2+2a+1)(a-1)^3$.

Prema tome, razlikujemo tri slučaja:

(*i*) $a=1\Rightarrow(\forall\alpha, \beta, \gamma\in R)(x, y, z, u)=(1-\alpha-\beta-\gamma, \alpha, \beta, \gamma)$;

(*ii*) $a=-3\Rightarrow$ sistem je protivrječan;

(*iii*) $a\notin\{1, -3\}\Rightarrow(x, y, z, u)=\left(-\frac{a^2+2a+3}{a+3}, -\frac{a^2+a-1}{a+3}, \frac{2a+1}{a+3}, \frac{a^3+3a^2+2a+1}{a+3}\right)$.

e) Kako je $D=(a+3)(a-4)$, $D_1=a-3$, $D_2=a+3$, $D_3=6(a+3)(a-4)$, to je za $a\notin\{-3, 4\}$

$$(x, y, z)=\left(\frac{-1}{a-4}, \frac{1}{a-4}, 6\right);$$

za $a=-3$ je $D=D_1=D_2=D_3=0$, te su potrebna dodatna ispitivanja. Primijetiti da se sabiranjem 2. i 3. jednačine dobije $3x+3y+3z=18$, što je ekvivalentno s prvom jednačinom. Dakle, u ovom slučaju ima beskonačno mnogo rješenja. Tako iz 1. i 3. jednačine izlazi:

$$(\forall z\in R)(x, y, z)=\left(\frac{19-3z}{7}, \frac{23-4z}{7}, z\right).$$

Za $a=+4$ je $D=0\wedge D_1=-7\neq 0$, te je sistem nesaglasan.

17. a) Kako je $D=2(ab-12)$, $D_1=4(b-4)$, $D_2=ab-12-10(b-4)$ $D_3=8(a-3)$, to za $ab\neq 12$ sistem ima jedinstveno rješenje

$$(x, y, z)=\left(\frac{2(b-4)}{ab-12}, \frac{ab-10b+28}{2(ab-12)}, \frac{4(a-3)}{ab-12}\right).$$

Za $a=3\wedge b=4$ ($\wedge ab=12$) sistem ima beskonačno mnogo rješenja; iz prve dvije jednačine izlazi:

$$(\forall z\in R)(x, y, z)=\left(\frac{2-2t}{3}, \frac{10t-7}{6}, t\right).$$

Za $ab=12\wedge b\neq 4$ ($\wedge a\neq 3$) je

$D=0\wedge D_1\neq 0$, te je sistem protivrječan.

b) Sada je $D=b(a+2)(a-1)^2$, $D_1=b(a-b)(a-1)$

$D_2=(a-1)(ba+b-2)$, $D_3=b(a-1)(a-b)$.

(*i*) Prema tome, za $D=b(a+2)(a-1)^2\neq 0\Leftrightarrow b\neq 0\wedge a\neq -2\wedge a\neq 1$ sistem ima jedinstveno rješenje

$$(x, y, z)=\left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \frac{D_3}{D}\right).$$

(*ii*) Za $b=0$ je $D=D_1=D_3=0\wedge D_2=-2(a-1)$ tako da je $D_2\neq 0$ za $a\neq 1$ (i $b=0$), te je za $b=0\wedge a\neq 1$ sistem protivrječan; za $a=1$, $b=0$ sistem se svodi na $x+z=1$, $x+z=0$, $x+z=1$, što je protivrječno. Dakle, za $b=0$ sistem je protivrječan.

(*iii*) Za $a=1$ je $D=D_1=D_2=D_3=0$, te su potrebna dodatna istraživanja. Tada se sistem svodi na

$$\begin{aligned} x+by+z&=1\\ x+by+z&=b\\ x+by+z&=1, \end{aligned}$$

te se vidi da je ili sistem protivrječan za $a=1\wedge b\neq 1$, a da za $a=1\wedge b=1$ ima beskonačno mnogo rješenja.

(*iv*) Za $a=-2$ razlikujemo $b\neq -2 \vee b=-2$.

U prvom slučaju $a=-2\wedge b\neq -2\Rightarrow D=0\wedge D_2=3(b+2)\neq 0$, te je sistem protivrječan. U slučaju kad je $a=-2$, $b=-2$ ($\Rightarrow D=D_1=D_2=D_3=0$) sistem se svodi na

$$\left.\begin{aligned} -2x-2y+z&=1\\ x+4y+z&=-2\\ x-2y-2z&=1 \end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{aligned} -2x-2y+z&=1\\ x+4y+z&=-2. \end{aligned}\right.$$

Provjeriti zadnju ekvivalenciju i pokazati da je opšte rješenje sistema

$(\forall y\in R)\ (x,\ y,\ z)=(-2y-1,\ y,\ -2y-1)$.

Prema tome, sistem je saglasan:

– za $a\neq 1\wedge a\neq -2\wedge b\neq 0$ kad ima jedinstveno rješenje prema Kramerovu pravilu;

– za $(a,\ b)\in\{(1,\ 1),\ (-2,\ -2)\}$ sistem ima beskonačno mnogo rješenja.

U svim drugim slučajevima sistem je protivrječan.

c) Sada je

$$D=\begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & b & 1\\ 1 & 2b & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a-1 & 1 & 1\\ 0 & b & 1\\ 0 & 2b & 1 \end{vmatrix}=-(a-1)b,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1\\ 3 & b & 1\\ 4 & 2b & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1\\ -1 & b & 1\\ 0 & 2b & 1 \end{vmatrix}=1-2b,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a & 4 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a-1 & 4 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}=-(a-1),$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a & 1 & 4\\ 1 & b & 3\\ 1 & 2b & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 1\\ 1 & b\\ 1 & 2b \end{vmatrix}=4ab+3+8b-4b-6ab-4$$

$=4b-2ab-1$. (Prema Sarusovu* pravilu)

(*i*) Za $D\neq 0\Leftrightarrow -(a-1)b\neq 0\Leftrightarrow a\neq 1\wedge b\neq 0$ sistem, prema Krameru, ima jedinstveno rješenje

$$(x,\ y,\ z)=\left(\frac{2b-1}{b(a-1)},\ b,\ \frac{2ab-4b+1}{b(a-1)}\right).$$

(*ii*) Za $a=1\wedge b\neq\frac{1}{2}$ je $D=0\wedge D_1\neq 0$, te je sistem protivrječan.

(*iii*) Za $a=1\wedge b=\frac{1}{2}$ je $D=D_1=D_2=D_3=0$. Pokazuje se da sistem ima beskonačno mnogo rješenja.

$(\forall z\in R)\,(x,\ y,\ z)=(2-z,\ 2,\ z)$

(*iv*) Za $b=0$ je $D=0$, $D_1=1\neq 0$, sistem je protivrječan.

* Sarrus, P. F. (1789 – 1861).

18. a) Determinanta sistema je

$$D=\begin{vmatrix} 2 & \lambda & -3\\ 3 & -1 & 5\\ 1 & -2 & \lambda+7 \end{vmatrix}=(\lambda+7)(\lambda-1),$$

pa zbog toga (vidi definiciju i teoremu 6) homogeni sistem ima samo trivijalno rješenje za $\lambda\notin\{-7,\ 1\}$, tj. tada je $(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 0)$ jedinstveno rješenje sistema.

Za $\lambda=-7$ sistem se svodi na

$$\left.\begin{aligned} 2x-7y-3z&=0\\ 3x-\ y+5z&=0\\ x-2y\qquad&=0 \end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{aligned} 2x-7y-3z&=0\\ x-2y\qquad&=0 \end{aligned}\right.$$

(gdje je posljednja jednačina posljedica prve dvije:

$5(2x-7y-3z)+5(3x-y+5z)=0\Leftrightarrow 19(x-2y)=0$).

Dakle, za $\lambda=-7$ sistem ima beskonačno mnogo rješenja:

$(\forall y\in R)\,(x,\ y,\ z)=(2y,\ y,\ -y)$.

Za $\lambda=1$ slično se dobije

$$(\forall y\in R)\,(x,\ y,\ z)=\left(\frac{-2y}{19},\ y,\ \frac{5y}{19}\right).$$

b) Determinanta sistema je $D=0$, te sistem ima netrivijalna rješenja $(x,\ y,\ z)=(13z/7,\ 2z/7,\ z)$ za svako $z\in R$.

c) Za $\lambda\in\{-2,\ -1\}$ sistem ima netrivijalna rješenja:

$(\lambda=-2)\,(\forall z)\,(x,\ y,\ z)=(2z,\ -z,\ z)$

$(\lambda=-1)\,(\forall z)\,(x,\ y,\ z)=(z,\ z/2,\ z)$.

d) Iz $D\neq 0\Leftrightarrow\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1\\ \lambda & -1 & 2\\ 1 & \lambda & 1+\lambda \end{vmatrix}=2(\lambda^2-4\lambda-2)=0\Leftrightarrow\lambda\in\{2\pm\sqrt{6}\}$.

Samo za ove vrijednosti λ sistem ima netrivijalna rješenja. Odrediti ih.

e) U ovom slučaju je

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -2 & -4\\ 3 & 1 & 3 & -2\\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{vmatrix}=-6D_{41}+3D_{42}-0D_{43}+(-7)D_{44}=-6\cdot 55+3\cdot 33-7(-33),$$

tj. $D=0$.

To znači da dati homogeni sistem ima netrivijalna rješenja. Kako je $D_{44}=-33\neq 0$, to se netrivijalna rješenja dobiju iz sistema

$$\begin{aligned} 2x+3y-\ z&=t\\ (*)\quad x-\ y-2z&=4t\\ 3x+\ y+3z&=2t \end{aligned}$$

sa tri nepoznate $x,\ y,\ z$ za proizvoljnu vrijednost t. Determinanta tog sistema je

$\Delta=D_{44}=-33$,

a determinante nepoznatih

$$\left.\begin{aligned} \Delta_x&=-t\,D_{41}=-55t\\ \Delta_y&=t\,D_{42}=33t\\ \Delta_z&=22t \end{aligned}\right\}\Rightarrow(x,\ y,\ z,\ t)=\left(\frac{5}{3}t,\ -t,\ -\frac{2}{3}t,\ t\right),\ \text{(za svako } t\in R).$$

19. Pošto sistem ima netrivijalnih rješenja, to je $D=0$. Ukoliko bi bilo suprotno, $D\neq 0$, onda bi prema Kramerovu pravilu sistem imao jedinstveno, trivijalno rješenje $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=(0,\ 0,\ 0,\ 0)$.

Pošto je determinanta formata 3×3 sastavljena od koeficijenata iz prve tri jednačine u prve tri nepoznate, riješiti prve tri jednačine po x_1, x_2, x_3, uzimajući x_4 kao proizvoljnu vrijednost. Zatim provjeriti da tako dobijeno rješenje zadovoljava preostalu, četvrtu jednačinu.

20. Determinanta sistema je $D=-(a^2+b^2+c^2+d^2)\neq 0$.

21. a) $(x, y, z)=\frac{1}{3}(a+b+c,\ a+bk^2+ck,\ a+bk+ck^2)$.

Rješenje se može dobiti Kramerovim metodom. Na drugi način se dobije ako saberemo sve jednačine, ili saberemo sve jednačine pošto smo drugu pomnožili sa k^2, a treću sa k ili, najzad, saberemo jednačine pošto smo drugu jednačinu pomnožili sa k, a treću sa k^2. Pri tome se primjenjuje uslov $1+k+k^2=0$.

b) $(x, y, z, t)=\frac{1}{4}(s-2a,\ s-2b,\ s-2c,\ s-2d)$,

gdje je $s=a+b+c+d$. Primijeniti Kramerov metod ili sabrati sve jednačine i dobiti jednačinu $2(x+y+z+t)=s$.

22. a) Iz tri data uslova: $f(1)=1$, $f(-1)=9$, $f(2)=-3$, moguće je dobiti tri jednačine te odrediti tri nepoznata koeficijenta, pa je traženi polinom drugog stepena

$y=P_2(x)=ax^2+bx+c$.

Iz datih uslova dobije se sistem jednačina

$$\left.\begin{aligned} a+\ b+c&=-1\\ a-\ b+c&=\ \ 9\\ 4a+2b+c&=-3\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow(a, b, c)=(1, -5, 3),$$

tj.

$y=P(x)=x^2-5x+3$;

b) $y=2x^3-5x^2+7$; c) $y=3x^3-5x^2+1$; d) $x=y^4-3y^3-5y+5$.

23. a) $x=\frac{2}{3}$; b) $x=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $k\in N$; c) ako se prva vrsta oduzme od svih ostalih, dobije se dijagonalna determinanta, tako da se jednačina svodi na

$-x(1-x)(2-x)\ldots(n-1-x)=0\Leftrightarrow x\in\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Primjedba: Jednačina c) se može riješiti, a da se ne izračuna determinanta. Dovoljno je zaključiti da se radi o algebarskoj jednačini n-tog stepena, koja onda ima tačno n korijena. Tako je za $x=k\in\{0, 1, \ldots, n\}$ data determinanta jednaka nuli, jer su joj jednake prva i $(k+2)$-va kolona. Jasno, otkrivajući sve nule, moguće je zapisati faktorizaciju polinoma, tj. sračunati determinantu. Koristiti to u d) i e) te dokazati:

d) korijeni su $x_1=a_1$, $x_2=a_2$, $\ldots$, $x_n=a_n$.